

João Victor Manke

Estimação de Sistemas Através de Filtros de Kalman

Florianópolis

6 de julho de 2018

João Victor Manke

Estimação de Sistemas Através de Filtros de Kalman

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado aprovado para a obtenção do Título de "Bacharel em Engenharia Elétrica", e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Engenharia Elétrica

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Departamento de Engenharia Elétrica

Orientador: José Carlos Bermudez

Florianópolis

6 de julho de 2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Manke, João Victor
Estimação de Sistemas Atrvés de Filtros de Kalman
/ João Victor Manke ; orientador, José Carlos
Bermudez, 2018.
54 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro
Tecnológico, Graduação em Engenharia Elétrica,
Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Engenharia Elétrica. 2. Filtro de Kalman. 3.
Estimação de Sistemas. 4. Sistemas Lineares. 5.
Sistemas Não Lineares. I. Bermudez, José Carlos.
II. Universidade Federal de Santa Catarina.
Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

João Victor Manke

ESTIMAÇÃO DE SISTEMAS ATRAVÉS DE FILTROS DE KALMAN

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de “Bacharel em Engenharia Elétrica” e aprovado, em sua forma final, pela Banca Examinadora

Florianópolis, 06 de julho de 2018.

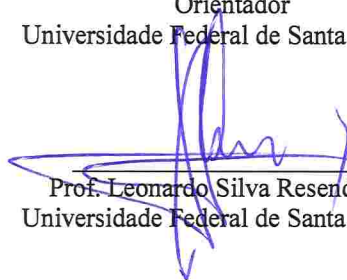


Prof. Renato Lucas Pacheco, Dr.
Coordenador do Curso de Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:



Prof. José Carlos Bermudez, Dr.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina



Prof. Leonardo Silva Resende, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina



Prof. Márcio Holsbach Costa, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

*Este trabalho é dedicado aos meus colegas
de classe, amigos e aos meus queridos pais
e irmão.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, meus pais, Aldo Felipe e Ana Paula, que sempre me deram muito carinho, incentivo e educação, e meu irmão, Luiz Felipe, que além de um grande irmão, um melhor amigo.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. José Carlos Bermudez, pela paciência, atenção e orientação dada durante o desenvolvimento do trabalho, sem os quais este não seria possível.

Por fim, agradeço a meus amigos, pelas noites de estudo, risadas e conversas, que tornaram estes anos de graduação, não só anos de desenvolvimento intelectual, mas também de desenvolvimento pessoal.

RESUMO

Este trabalho estuda o funcionamento do filtro de Kalman, assim como sua aplicação na estimação de sistemas lineares e não lineares. Inicialmente são deduzidas as equações do filtro de Kalman a partir das suposições pertinentes ao algoritmo, então os problemas de estimação são formulados de maneira a utilizar o filtro para resolvê-los. No caso não linear faz-se uso do truque do Kernel para eliminar a necessidade de explicitar diretamente as funções de não linearidade a serem aplicadas na entrada do algoritmo. Foram feitas simulações para verificar o funcionamento dos algoritmos e compará-los a algoritmos comuns na área de estimação de sistemas (algoritmos mínimos quadrados). Os resultados mostram que o filtro de Kalman é uma boa ferramenta para resolução deste tipo de problema.

Palavras-chave: Filtro de Kalman, Estimação de Sistemas, Sistemas Lineares, Sistemas Não Lineares.

ABSTRACT

This work studies the behavior of the Kalman filter, as well as its application in linear and nonlinear system estimation. Initially the filter's equations are derived stemmed from the assumptions relevant to the algorithm, then the problems of system estimation are formulated in a way that it is possible to use the Kalman filter to solve them. In the nonlinear case the kernel trick is applied to eliminate the necessity to explicitly choose the nonlinearities to be applied on the algorithm inputs. Simulations were conducted to ascertain if the filter can solve these problems, as well as, to compare it to common system estimation algorithms (least square algorithms). The results show that the Kalman filter is a good tool to apply on these kind of problems.

Keywords: Kalman Filter, System Estimation, Linear Systems, Nonlinear Systems.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama de Blocos de um Filtro de Kalman	32
Figura 2 – Erro quadrático médio dos filtros de Kalman e de média móvel	33
Figura 3 – Diagrama de um Estimador de Sistemas . . .	36
Figura 4 – Diagrama de um Estimador de Sistemas, Entrada como Sistema	37
Figura 5 – Erros de estimação com filtro de Kalman e NLMS	40
Figura 6 – Erro em regime da estimação com filtro de Kalman e NLMS	41
Figura 7 – Coeficientes das estimações por filtro de Kalman e NLMS	41
Figura 8 – Diagrama de um Estimador de Kalman Kernelizado	47
Figura 9 – Erros de estimação com KKE e KNLMS . . .	49

Lista de abreviaturas e siglas

FIR	Resposta ao Impulso Finita
NLMS	Estimador de Mínimos Quadrados Normalizado
MSE	Erro Quadrático Médio
EMSE	Erro Quadrático Médio
MSD	Distância Quadrática Média
KKE	Estimador de Kalman Kernelizado
KNLMS	Estimador de Mínimos Quadrados Normalizado e Kernelizado

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
2	FILTRO DE KALMAN	21
2.1	O Problema	21
2.2	O Filtro de Kalman	23
2.2.1	O Ganho de Kalman	25
2.2.2	Estimando a Matriz de Covariância	28
2.3	Sequência de Cálculo de uma Iteração do Filtro de Kalman	30
2.4	Simulações	33
3	ESTIMAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES	35
3.1	O Problema	35
3.2	Adequando o Problema ao Filtro de Kalman	37
3.3	Simulações	38
4	ESTIMAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES	43
4.1	O Problema	43
4.2	Espaço de Hilbert Definido por Kernels	44
4.2.1	O Truque do Kernel	44
4.3	Adaptando o Estimador de Sistemas para o Caso Não Linear	45
4.4	Simulações	47
5	CONCLUSÃO	51

REFERÊNCIAS	53
-----------------------	----

1 Introdução

A grande maioria dos métodos de trabalho para a análise de sistemas, seja para controle, simulação, identificação ou outras aplicações, assume que o comportamento dos mesmos pode ser modelado por um sistema linear. Em muitos casos o modelo linear é assumido invariante no tempo. Entretanto, o comportamento de uma grande quantidade de sistemas práticos varia significativamente com o tempo, requerendo uma modelagem com essa característica. Além disso, aplicações frequentemente requerem que a estimação dos parâmetros do modelo seja feita em tempo real.

Dentre os diferentes métodos de estimação de modelo para um sistema linear e variante no tempo, a estimação através de um filtro de Kalman se destaca devido à sua simplicidade, reduzida necessidade computacional e possibilidade de extensão do conceito para sistemas não lineares.

Este trabalho de conclusão de curso visa estudar a teoria e o desempenho dos estimadores de sistema por filtro de Kalman através de implementações em Python e simulações comparativas com outros métodos também difundidos. Para isso, primeiramente é feito um estudo do funcionamento de um filtro de Kalman aplicado em um ambiente em que esse tipo de filtro é bastante utilizado (medições e fusão de sensores) ([GAN; HARRIS, 2001](#)) para depois transferir estes conhecimentos para o ambiente de estimação de estados de sistemas lineares e não lineares.

2 Filtro de Kalman

2.1 O Problema

Para entender o funcionamento de um filtro de Kalman é importante primeiro entender seu equacionamento, que considera observações obtidas através de medições ruidosas. Esse tipo de filtro é muito utilizado em aplicações como o rastreamento da posição, velocidade e aceleração de aviões, drones e até veículos autônomos (LEFFERTS; MARKLEY; SHUSTER, 1982). No decorrer da explicação do funcionamento e da dedução do equacionamento do filtro de Kalman, exemplos desses casos citados anteriormente serão utilizados para ajudar no entendimento da utilização prática desse tipo de algoritmo de filtragem.

Primeiramente, vamos introduzir um sistema genérico descrito na forma de variáveis de estado:

$$X_k = AX_{k-1} + Bu_k \quad (2.1)$$

$$Y_k = HX_k \quad (2.2)$$

Os estados internos ao sistema (X_k) são dependentes dos valores dos estados passados (X_{k-1}) e de uma entrada (u_k) através de duas matrizes que descrevem o sistema; a matriz de transição de estados (A) e a matriz de entrada (B). A saída do sistema (Y_k) é uma função linear do vetor atual de estados através de outra matriz, a matriz de medição de estados (H).

Para o exemplo de um sistema de medição de posicionamento é possível descrever o sistema de duas formas diferentes: supõe-se a aceleração como entrada do sistema e então os estados a serem estimados são a velocidade (V_k) e a posição (S_k), ou considera-se a aceleração como um dos estados e então o sistema tem entrada nula e faz-se uma estimativa da dinâmica da aceleração, neste último, caso a dinâmica da aceleração não seja conhecida, utiliza-se a suposição de que a mesma é constante e que sua dinâmica será ditada pelas medições.

Neste momento somente será analisado o primeiro caso, contudo o segundo é facilmente deduzido a partir do mostrado a seguir. Assumindo a entrada como sendo somente o valor da aceleração $u_k = a_k$, as matrizes do sistema serão:

$$X_k = \begin{bmatrix} S_k \\ V_k \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

De forma que:

$$S_k = S_{k-1} + \Delta t V_{k-1} + \frac{\Delta t^2}{2} a_k \quad (2.6)$$

$$V_k = V_{k-1} + \Delta t a_k \quad (2.7)$$

Além disso ainda é necessário definir H . Esta matriz é muito dependente da maneira de aquisição de dados. Infinitos casos são possíveis, contudo o mais comum seria a aquisição direta dos

valores de velocidade e posição, e portanto $Y_k = X_k$ resultando em H sendo uma matriz identidade. Contudo, é possível adaptar esta matriz para outras formas de medição. Por exemplo, no caso em que somente a posição é medida pode-se usar a seguinte matriz:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$Y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_k \\ V_k \end{bmatrix} = S_k \quad (2.9)$$

Esse modelo, contudo, assume conhecimento exato do sistema e medições perfeitas. A consideração de leves inconsistências no modelo (w_k) e de erros das medidas devido a sensores não perfeitos (v_k), modela estes dois sinais de erro como variáveis aleatórias gaussianas, com média zero e não correlacionadas. Pode-se então atualizar as equações do sistema como a seguir:

$$X_k = AX_{k-1} + Bu_k + w_k \quad (2.10)$$

$$Y_k = HX_k + v_k \quad (2.11)$$

A função do filtro de Kalman é combinar a medida Y_k a uma predição \hat{Y}_k para obter uma estimativa \hat{X}_k que se aproxima ao máximo de X_k .

2.2 O Filtro de Kalman

Como dito anteriormente o filtro de Kalman é nada mais do que uma ponderação entre o valor medido e o valor esperado obtido através da modelagem do sistema.

Primeiramente vamos supor que já existe uma estimativa proveniente ou de alguma condição inicial dada ou de uma

iteração passada: $X_{k-1|k-1}$. Neste caso o subscrito $k-1|k-1$ indica que é uma estimativa da iteração passada (primeiro $k-1$) proveniente de valores referentes à iteração passada (segundo $k-1$).

Então estima-se o valor dos estados da iteração atual (k) através do modelo do sistema:

$$X_{k|k-1} = AX_{k-1|k-1} + Bu_k \quad (2.12)$$

De maneira análoga à explicada anteriormente, $X_{k|k-1}$ é a estimativa da iteração atual (subscrito k) proveniente de valores referentes à iteração passada (subscrito $k-1$), nesse caso $X_{k-1|k-1}$. Esta estimativa que em conjunto com uma medição, irá resultar na estimativa final dos estados através de um sinal de erro (ey_k) e de uma matriz de ganho (K).

$$ey_k = Y_k - HX_{k|k-1} \quad (2.13)$$

$$X_{k|k} = X_{k|k-1} + K ey_k \quad (2.14)$$

$$X_{k|k} = X_{k|k-1} + K(Y_k - HX_{k|k-1}) \quad (2.15)$$

$$X_{k|k} = (I - KH)X_{k|k-1} + KY_k \quad (2.16)$$

A equação (2.15) portanto dá-nos a estimativa final do estado ($X_{k|k}$) através da estimativa proveniente do modelo ($X_{k|k-1}$) e das medições feitas (Y_k). Neste ponto já temos um filtro recursivo que, através da matriz de ganho K , pode controlar a ênfase (confiança) dada às medições ou ao modelo. A equação (2.16) evidencia como este ganho pode ser escolhido. Por exemplo, para um sistema com

medições precisas pode-se fazer $K = H^{-1}$ (em um caso em que H é inversível) dando prioridade às medições ($X_{k|k} = H^{-1}Y_k$), ou para um sistema com medições não confiáveis pode fazer-se $K = 0$ dando prioridade total ao modelo ($X_{k|k} = X_{k|k-1}$).

2.2.1 O Ganho de Kalman

Como apontado anteriormente, em filtros com a estrutura recursiva descrita anteriormente o ganho K pode ser definido arbitrariamente (obedecendo as dimensões das equações matriciais). O que diferencia o filtro de Kalman de outros filtros que podem utilizar essa estrutura é a escolha do ganho K . Filtros de Kalman utilizam a matriz de ganho que, de acordo com as propriedades do sistema, minimiza o erro no estado estimado.

Essa matriz de ganho é atualizada a cada iteração, junto com uma estimativa da confiabilidade (matriz de covariância) das estimativas. Portanto, a matriz de ganho calculada através das equações que serão descritas a seguir proporciona o funcionamento ótimo para filtros recursivos com a estrutura descrita, e é conhecida então como o Ganho de Kalman.

Para proporcionar maior entendimento sobre o cálculo desse ganho e sobre as informações necessárias para calculá-lo, a dedução desse ganho de Kalman será feita a seguir. O cálculo inicia-se com o objetivo de otimizar o erro entre a estimativa final e o valor real ($e_{k|k}$). Essa otimização é atingida minimizando o traço da matriz de autocovariância associada a esse erro, que é equivalente a minimizar a somatória do valor esperado dos quadrados dos componentes deste erro (assumindo que o erro tenha média nula).

$$e_{k|k} = X_k - X_{k|k} \quad (2.17)$$

Define-se $P_{k|k}$ então como a matriz de covariância desse erro:

$$P_{k|k} = E[e_{k|k} e_{k|k}^T] \quad (2.18)$$

em que $E[.]$ denota esperança estatística. Combinando as equações (2.16) e (2.11) temos que:

$$X_{k|k} = (I - KH)X_{k|k-1} + K(HX_k + v_k) \quad (2.19)$$

e portanto:

$$e_{k|k} = X_k - ((I - KH)X_{k|k-1} + K(HX_k + v_k)) \quad (2.20)$$

$$e_{k|k} = (I - KH)X_k - (I - KH)X_{k|k-1} - Kv_k \quad (2.21)$$

$$e_{k|k} = (I - KH)(X_k - X_{k|k-1}) - Kv_k \quad (2.22)$$

O erro do estado estimado pelo nosso sistema no instante k a partir das observações até $k - 1$ é:

$$e_{k|k-1} = X_k - X_{k|k-1} \quad (2.23)$$

Usando (2.23), a equação (2.22) pode ser escrita como:

$$e_{k|k} = (I - KH)e_{k|k-1} - Kv_k \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} P_{k|k} &= E[((I - KH)e_{k|k-1} - Kv_k) \\ &\quad ((I - KH)e_{k|k-1} - Kv_k)^T] \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} P_{k|k} &= E[(I - KH)e_{k|k-1}e_{k|k-1}^T(I - KH)^T] \\ &\quad - E[Kv_k e_{k|k-1}^T(I - KH)^T] \\ &\quad - E[(I - KH)e_{k|k-1}v_k^T K^T] \\ &\quad + E[Kv_k v_k^T K^T] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Como v_k é não correlacionado com $e_{k|k-1}$ e tem média nula, o segundo e terceiro termos da equação (2.26) são nulos e, portanto, temos que:

$$P_{k|k} = (I - KH)P_{k|k-1}(I - KH)^T + KQ_vK^T \quad (2.27)$$

Sendo $P_{k|k-1}$ a matriz de covariância do erro da estimativa *a priori* $X_{k|k-1}$ em relação a X_k e Q_v a matriz de covariância do ruído de medição v_k .

$$P_{k|k-1} = E[e_{k|k-1}e_{k|k-1}^T] \quad (2.28)$$

$$Q_v = E[v_kv_k^T] \quad (2.29)$$

Rearranjando a equação (2.27):

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - KHP_{k|k-1} - P_{k|k-1}H^TK^T + K(HP_{k|k-1}H^T + Q_v)K^T \quad (2.30)$$

Uma matriz de covariância de dimensão $N \times N$ segue a seguinte forma:

$$P = \begin{bmatrix} E[e[1]^2] & E[e[1]e[2]] & \dots & E[e[1]e[N]] \\ E[e[2]e[1]] & E[e[2]^2] & \dots & E[e[2]e[N]] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[e[N]e[1]] & E[e[N]e[2]] & \dots & E[e[N]^2] \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

A minimização da energia do sinal $e[n]$ corresponde à minimização do traço de P ($T[P]$). Aplicando o operador traço à equação (2.27):

$$\begin{aligned} T[P_{k|k}] &= T[P_{k|k-1}] - T[KHP_{k|k-1}] - T[P_{k|k-1}H^TK^T] \\ &\quad + T[K(HP_{k|k-1}H^T + Q_v)K^T] \end{aligned} \quad (2.32)$$

Através da matriz em (2.31) é possível notar que uma matriz de covariância é sempre simétrica em relação à sua diagonal principal

($P = P^T$). Considerando também que para qualquer matriz quadrada $T[A] = T[A^T]$, a equação (2.32) se simplifica em:

$$\begin{aligned} T[P_{k|k}] = & T[P_{k|k-1}] - 2T[KHP_{k|k-1}] \\ & + T[K(HP_{k|k-1}H^T + Q_v)K^T] \end{aligned} \quad (2.33)$$

Para então encontrar o valor de K que minimiza a energia do erro deve-se aplicar a derivada parcial em relação a K e igualar a equação a zero.

$$\frac{\partial}{\partial K} T[P_{k|k}] = 0 \quad (2.34)$$

Utilizando as propriedades do traço de uma matriz encontradas em (PETERSEN; PEDERSEN; others, 2008) tem-se que:

$$-2P_{k|k-1}H^T + 2K(HP_{k|k-1}H^T + Q_v) = 0 \quad (2.35)$$

$$K(HP_{k|k-1}H^T + Q_v) = P_{k|k-1}H^T \quad (2.36)$$

$$K = P_{k|k-1}H^T(HP_{k|k-1}H^T + Q_v)^{-1} \quad (2.37)$$

A equação (2.37), então, é uma maneira de calcular o ganho de Kalman para minimizar o erro ao utilizar o filtro recursivo. Contudo, ainda é necessário estimar a matriz de covariância $P_{k|k-1}$, assumindo, é claro, que Q_v já é conhecida. Para isto faz-se, também recursivamente, uma estimação dessa matriz.

2.2.2 Estimando a Matriz de Covariância

Para estimar recursivamente a matriz de covariância a cada iteração do filtro devemos fazer uma estimação *a priori* ($P_{k|k-1}$) a partir da matrix de covariância da última iteração ($P_{k-1|k-1}$) ou de uma condição inicial. Essa recurção então é

utilizada para calcular o ganho de Kalman a partir da equação (2.37). Para encontrar $P_{k|k-1}$ em termos de $P_{k-1|k-1}$ se usará a mesma definição de matriz de covariância dada na equação (2.28), em conjunto com as equações de modelo e de sistema adotadas, (2.12) e (2.10) respectivamente.

$$P_{k|k-1} = E[(X_k - X_{k|k-1})(X_k - X_{k|k-1})^T] \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} P_{k|k-1} = E[& (AX_{k-1} + Bu_k + w_k - (AX_{k-1|k-1} + Bu_k)) \\ & (AX_{k-1} + Bu_k + w_k - (AX_{k-1|k-1} + Bu_k))^T] \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$P_{k|k-1} = E[(A(X_{k-1} - X_{k-1|k-1}) + w_k)(A(X_{k-1} - X_{k-1|k-1}) + w_k)^T] \quad (2.40)$$

$$P_{k|k-1} = E[(Ae_{k-1|k-1} + w_k)(Ae_{k-1|k-1} + w_k)^T] \quad (2.41)$$

Como w_k é não correlacionado com $e_{k-1|k-1}$ e tem média nula:

$$P_{k|k-1} = E[Ae_{k-1|k-1}e_{k-1|k-1}^T A^T] + E[w_k w_k^T] \quad (2.42)$$

$$P_{k|k-1} = AP_{k-1|k-1}A^T + Q_w \quad (2.43)$$

Com $P_{k|k-1}$ pode-se utilizar a equação (2.27) para calcular $P_{k|k}$. Contudo uma equação mais simples pode ser obtida quando utilizando K ótimo da equação (2.37).

Substituindo (2.36) em (2.30):

$$P_{k|k} = (I - KH)P_{k|k-1} - P_{k|k-1}H^T K^T + P_{k|k-1}H^T K^T \quad (2.44)$$

$$P_{k|k} = (I - KH)P_{k|k-1} \quad (2.45)$$

A equação (2.45) é a última equação necessária para descrever totalmente o filtro de Kalman.

2.3 Sequência de Cálculo de uma Iteração do Filtro de Kalman

Para resumir e condensar as equações relevantes para a implementação de um filtro de Kalman segue uma sequência de cálculo simplificada com uma breve explicação de cada passo. Contudo antes de iniciar o cálculo é preciso escolher ou medir certas condições relevantes ao sistema em questão.

Além das matrizes A , B , e H já exemplificadas anteriormente também é necessário definir as matrizes covariância dos ruídos de medição (Q_v) e de processo (Q_w), assim como as condições iniciais para o estado ($X_{-1|-1}$) e sua matriz covariância ($P_{-1|-1}$). As condições iniciais têm menos influência no resultado do filtro pois erros contidos nestas condições serão com o tempo corrigidas pelo próprio algoritmo. As matrizes covariância dos ruídos, por outro lado, são consideradas constantes durante todo o funcionamento do filtro. Portanto, uma definição mais precisa destas variáveis aumenta a eficiência do filtro. Métodos para cálculo destas variáveis em tempo real existem como em (ÅKESSON et al., 2008), (ODELSON; RAJAMANI; RAWLINGS, 2003) e (BULUT; VINES-CAVANAUGH; BERNAL, 2011). Contudo, tal estudo está fora do escopo deste trabalho.

Com as informações do sistema em mãos, é possível iniciar o processo de filtragem das medições:

1. Estimar o estado atual a partir do estado passado (ou condição inicial) utilizando as equações do sistema;

$$X_{k|k-1} = AX_{k-1|k-1} + Bu_k \quad (2.46)$$

2. Estimar a matriz covariância atual a partir da matriz covariância passada (ou condição inicial);

$$P_{k|k-1} = AP_{k-1|k-1}A^T + Q_w \quad (2.47)$$

3. Calcular o ganho de Kalman;

$$K = P_{k|k-1}H^T(H P_{k|k-1}H^T + Q_v)^{-1} \quad (2.48)$$

4. Obter a medição Y_k ;
5. Combinar a medição ao valor estimado anteriormente através do ganho;

$$X_{k|k} = X_{k|k-1} + K(Y_k - HX_{k|k-1}) \quad (2.49)$$

6. Calcular a matriz covariância após a filtragem;

$$P_{k|k} = (I - KH)P_{k|k-1} \quad (2.50)$$

7. Prosseguir para a próxima iteração;

$$k = k + 1 \quad (2.51)$$

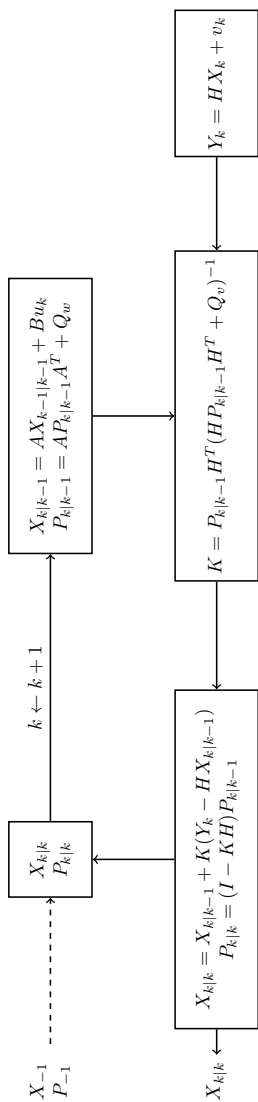


Figura 1 – Diagrama de Blocos de um Filtro de Kalman

2.4 Simulações

Nessa seção será analisada uma simulação feita para verificar a eficácia do filtro de Kalman em comparação a um filtro de média móvel ($N = 3$) comumente utilizado para filtragem de medições de sensores.

Para esta simulação foi usada a situação dada como exemplo durante a introdução do conceito de um filtro de Kalman, um sistema de medição de posicionamento. Portanto as matrizes que descrevem o sistema podem ser obtidas em (2.4), (2.5) e (2.8).

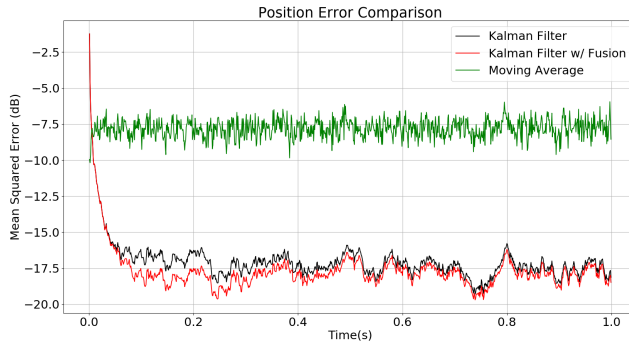


Figura 2 – Erro quadrático médio dos filtros de Kalman e de média móvel

Outra funcionalidade do filtro de Kalman é a possibilidade de fazer medições indiretas, neste caso é possível medir a velocidade a partir de medições de posição de maneira menos ruidosa do que se simplesmente derivássemos a posição medida. Mas também é possível utilizar medidas de velocidade para melhorar as medições de posição utilizando a matriz de medição em

(2.52), filtrando ao mesmo tempo medições de posição e velocidade, levando em consideração a sua relação através da matriz de transição de estados, isso se chama fusão de sensores.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$Y_k = \begin{bmatrix} S_k \\ V_k \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Na figura 2 podemos ver a melhora que um filtro de Kalman traz quando comparado com um filtro simples, e também podemos ver que com a fusão de sensores um filtro de Kalman consegue atingir o seu regime permanente mais rapidamente.

3 Estimação de Sistemas Utilizando um Filtro de Kalman

3.1 O Problema

Até agora foi demonstrado o funcionamento de um filtro de Kalman, associando-o ao seu mais comum uso, filtragem de medições para aplicações com um ou mais sensores. Por outro lado esse trabalho tem como foco a aplicação deste na estimação de sistemas lineares.

Um estimador de sistemas tem como função gerar um sistema artificial que, quando exposto às mesmas entradas, reproduza as saídas de um sistema real. Isso é útil quando o sistema é desconhecido e/ou a dedução de uma função analítica para o sistema não é possível; ou quando é desejável representar o sistema em questão por um sistema simplificado, por exemplo.

Em geral, um estimador de sistemas utiliza um filtro digital adaptável para fazer a representação do sistema, ajustando os parâmetros desse filtro para melhor representar o funcionamento do sistema original através de um algoritmo de minimização de erro, como exemplificado na figura 3.

Por exemplo, em um caso de supressão de eco, o sistema estimado pode ser utilizado para gerar uma aproximação da função de transferência inversa do canal de comunicação que está introduzindo o eco. Essa aproximação pode ser utilizada para filtrar o sinal recebido e minimizar o efeito de eco, melhorando a

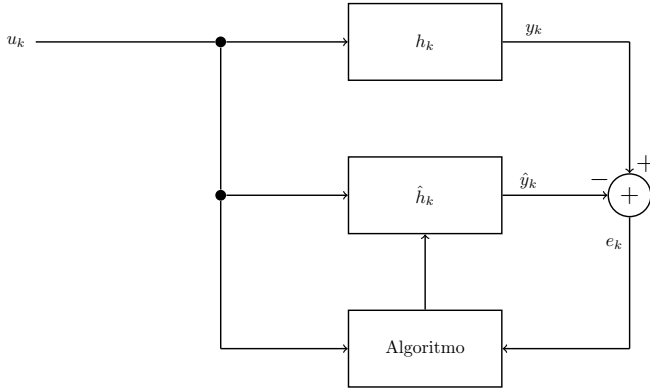


Figura 3 – Diagrama de um Estimador de Sistemas

inteligibilidade da mensagem.

Por outro lado, no contexto de projeto de controladores, o sistema estimado pode ser utilizado como modelo ou simplificação de um sistema desconhecido ou complexo. Pode-se utilizar o sistema estimado em conjunto com técnicas de projeto que só podem ser utilizadas em sistemas mais simples (lineares por exemplo).

Neste trabalho utilizaremos um filtro de resposta ao impulso finita (FIR) como sistema artificial, este tipo de filtro é definido através de seus N coeficientes ($\hat{h}_k = [\hat{h}_k[0], \hat{h}_k[1], \dots, \hat{h}_k[N-1]]^T$) que o produto interno com as N últimas estradas do sistema ($u_k = [u[k], u[k-1], \dots, u[k-N+1]]$) resulta na saída do filtro (\hat{y}_k) de forma que a equação (3.1) descreve este filtro. Para estimar os coeficientes do filtro será utilizado um filtro de Kalman.

$$\hat{y}_k = u_k \cdot \hat{h}_k \quad (3.1)$$

3.2 Adequando o Problema ao Filtro de Kalman

Podemos reformular a figura 3 como na figura 4 sem perda de generalidade, desta maneira o problema de estimação fica em uma forma mais parecida com a forma esperada para a aplicação de um filtro de Kalman.

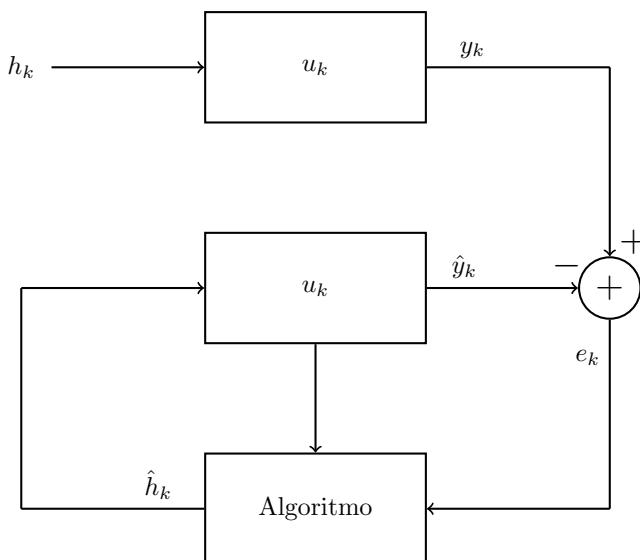


Figura 4 – Diagrama de um Estimador de Sistemas, Entrada como Sistema

Queremos estimar o estado $X_k = h_k$ através das observações $Y_k = y_k$ feitas através de uma matriz (nesse caso um vetor) de medição $H = u_k$. Consequentemente temos que:

$$\begin{aligned}
 e_k &= y_k - \hat{y}_k = u_k \cdot h_k - u_k \cdot \hat{h}_k = HX_k - HX_{k|k} \\
 &= H(X_k - X_{k|k}) = He_{k|k}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Como o filtro de Kalman minimiza o erro $e_{k|k}$, consequentemente

se utilizarmos ele nesse contexto estaremos minimizando o erro entre as saídas do sistema real e estimado (e_k).

Tanto no caso da figura 3 quanto da figura 4, h_k é a melhor representação do sistema a ser estimado como um filtro FIR, isso é, este método exige que o sistema tenha uma boa representação no espaço de sistemas escolhido (filtros FIR de tamanho N). Portanto, sistemas especialmente não lineares ou com funções de transferência com componentes relevantes além do comprimento N não terão boas estimações com este método, no primeiro caso será necessário expandir o método para tratar com sistemas não lineares, no segundo caso uma melhor escolha de N pode solucionar o problema.

3.3 Simulações

Para verificar o funcionamento do estimador foi feita uma simulação com um sistema do tipo cosseno levantado truncado que varia pela adição de ruído branco a cada um de seus coeficientes a cada passo de iteração. Para comparação utilizou-se o método de Mínimos Quadrados Normalizado (NLMS), um dos métodos mais tradicionais e comuns no contexto de estimação de estados lineares, sua formulação é simples, implementado de forma recursiva segundo a equação (3.3) (PAULO; others, 2008).

$$\hat{h}_k = \hat{h}_{k-1} + \mu \frac{u_k^T}{\|u_k\|^2} \cdot (y_k - u_k \cdot \hat{h}_{k-1}) \quad (3.3)$$

O parâmetro μ é controla o passo de convergência, nestas simulações será considerado $\mu = 1$.

Para comparação entre os dois métodos vamos medir o erro entre saída do sistema de referência e a saída dos sistemas

estimados (MSE), o erro entre os coeficientes estimados e de referência (soma dos quadrados) que também representa a distância entre os vetores de coeficientes (MSD), e a diferença entre o erro obtido na saída do estimador com o ruído introduzido na simulação (EMSE), a figura 5 mostra os valores médios desses erros a cada iteração.

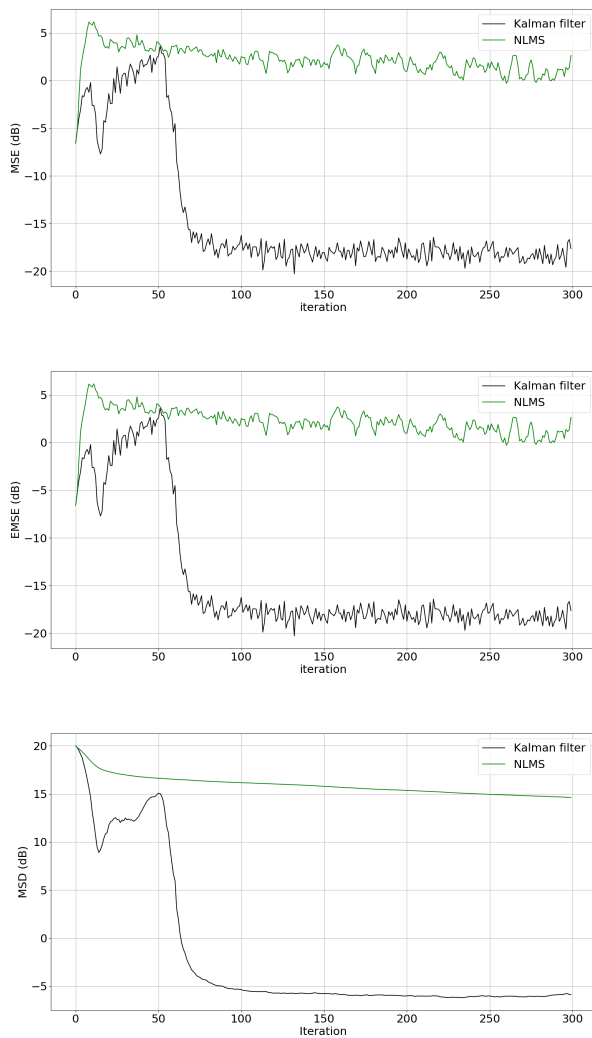


Figura 5 – Erros de estimação com filtro de Kalman e NLMS

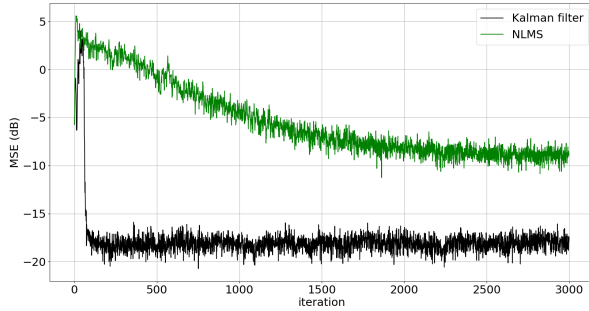


Figura 6 – Erro em regime da estimação com filtro de Kalman e NLMS

É possível verificar que o filtro de Kalman converge muito mais rapidamente que o NLMS e tem um erro em regime várias vezes menor como visto na figura 6. Na figura 7 podemos ver os coeficientes de uma das simulações após 300 iterações.

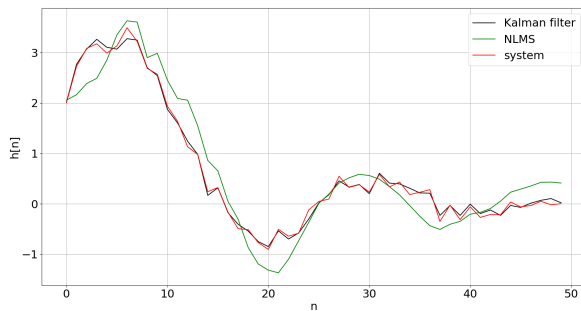


Figura 7 – Coeficientes das estimações por filtro de Kalman e NLMS

4 Estimação de Sistemas Não Lineares Utilizando um Filtro de Kalman

4.1 O Problema

Como visto no capítulo anterior o estimador proposto funciona muito bem, contudo ele é restrito à estimação de sistemas lineares. Para resolver este problema podemos generalizar o algoritmo para utilizar não somente uma combinação linear da entrada atual e atrasadas do sistema, mas também a combinação linear de quaisquer funções arbitrárias $\phi_i(u_k)$ sobre estas entradas.

Neste caso poderíamos construir a matriz H da seguinte forma:

$$H = [\phi_1(u_k), \phi_2(u_k), \phi_3(u_k), \dots, \phi_N(u_k)] \quad (4.1)$$

A escolha as funções $\phi_i(\cdot)$ deve ser feita de acordo com as propriedades do sistema a ser estimado, propriedades que nem sempre são conhecidas, dificultando tal escolha.

Por outro lado podemos utilizar esta ideia de transformar as entradas do sistema para um outro espaço \mathcal{H} que seja mais conveniente para representar o sistema em questão, podemos então representar o sistema de forma geral por uma função $\phi(\cdot) \in \mathcal{H}$, de maneira que:

$$\hat{y}_k = \Phi(u_k) \quad (4.2)$$

Desta forma modificamos o problema para a escolha da função $\Phi(\cdot)$, o que precisamos é uma forma de representar esta função de maneira que podemos utilizar da estrutura do filtro de Kalman para estimá-la.

4.2 Espaço de Hilbert Definido por Kernels

Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial linear que tem uma operação de produto interno $\langle x_i, x_j \rangle$ entre dois vetores x_i e x_j que obedece as seguintes propriedades:

- Simetria conjugada;
- Linearidade em relação ao vetor x_j ;
- Antilinearidade em relação ao vetor x_i ;
- É positiva definida;

Um espaço de Hilbert definido por kernel, por outro lado, tem mais uma propriedade interessante: é possível calcular o produto interno entre dois vetores internos ao espaço provenientes de um mapeamento $\phi(\cdot)$ pertencente ao Hilbert, através de uma função chamada de kernel sobre os vetores no espaço original.

$$K(x_i, x_j) = \langle \phi(x_i), \phi(x_j) \rangle \quad (4.3)$$

4.2.1 O Truque do Kernel

O truque do kernel é nada mais que usar da propriedade de cálculo do produto interno descrita anteriormente e pela equação (4.3) para calcular o produto interno em um espaço onde as entradas do sistema foram transformadas não linearmente

sem sequer necessitar saber qual é esta função de transformação $\phi(\cdot)$, já que podemos simplesmente definir diretamente a função $K(\cdot, \cdot)$.

Dentre alguns dos mais comuns kernels estão:

- Kernel linear: $K(x, y) = x^T \cdot y$
- Kernel polinomial: $K(x, y) = (\alpha x^T \cdot y + 1)^\beta$
- Kernel gaussiano: $K(x, y) = e^{-\frac{\|x-y\|^2}{\xi}}$

4.3 Adaptando o Estimador de Sistemas para o Caso Não Linear

Como provado em (KIMELDORF, 1971) a função $\Phi(\cdot)$ pertencente ao espaço de Hilbert \mathcal{H} caracterizado pelo kernel $K(\cdot, \cdot)$ que minimiza o erro quadrático médio em (4.4) a partir de N observações de y_k e u_k , pode ser escrito como uma expansão de kernel da forma dada na equação (4.5).

$$e_k^2 = \|y_k - \Phi(u_k)\|^2 \quad (4.4)$$

$$\Phi(\cdot) = \sum_{i=0}^{N-1} z_k[i] K(\cdot, u_{k-i}) \quad (4.5)$$

Com essa formulação podemos utilizar o filtro de Kalman para estimar de maneira ótima os coeficientes $w[i]$.

Para facilitar a adaptação do algoritmo do estimador de Kalman é necessário colocar a equação (4.5) em sua forma vetorial.

$$\Phi(\cdot) = K_k(\cdot) \cdot z_k \quad (4.6)$$

onde $K_k(\cdot) = [K(\cdot, u_k), K(\cdot, u_{k-1}), \dots, K(\cdot, u_{k-N+1})]$ e z_k é um vetor coluna de pesos de tamanho N a serem estimados.

Quando aplicamos a função $\Phi(\cdot)$ à entrada do sistema obtemos a saída conforme a equação (4.2):

$$\hat{y}_k = \Phi(u_k) = K_k(u_k) \cdot z_k \quad (4.7)$$

Fazendo uma breve inspeção entre as funções (3.1) e (4.7) é possível notar que a estrutura é idêntica, apenas, no caso não linear, a matriz de medição H agora será dada pela matriz $K_k(u_k)$ de produtos internos no espaço de Hilbert, ao invés de simplesmente os valores das entradas do sistema no espaço não transformado no caso linear. Nenhuma outra modificação é necessária pois a formulação continua sendo linear em relação aos parâmetros z_k e sabendo que $K_k(\cdot)$ quando calculado na entrada u_k ($K_k(u_k)$) é nada mais que uma matriz ou vetor de valores reais.

O novo diagrama de blocos do algoritmo para estimação não linear, agora chamado de Estimador de Kalman Kernelizado (KKE) pode ser encontrado na figura 8.

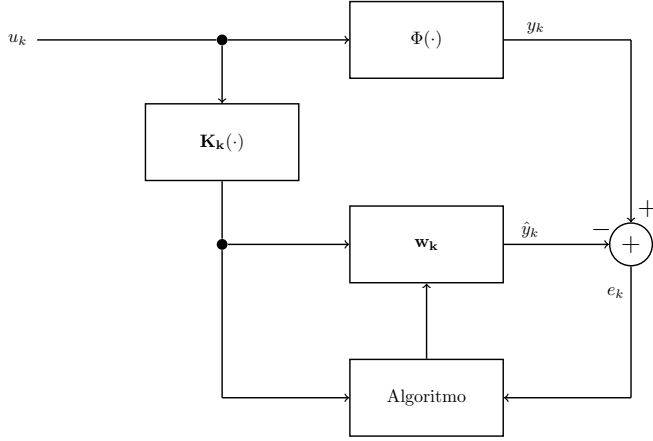


Figura 8 – Diagrama de um Estimador de Kalman Kernelizado

4.4 Simulações

De forma similar à feita nos capítulos anteriores vamos fazer a comparação entre o método KKE acima e um método mais simples e mais comum, o NLMS kernelizado (KNLMS). Este método segue a mesma linha do método NLMS utilizado para comparação anteriormente, contudo sua construção também foi kernelizada.

O método KNLMS também usa o produto interno de entradas passadas com a atual em um espaço de Hilbert definido por Kernel para atualizar os pesos utilizados para representação da função não linear da forma 4.7, sua forma é bem parecida à anteriormente utilizada para o filtro NLMS não kernelizado (NISHIKAWA; ALBU, 2015).

$$z_k = z_{k-1} + \mu \frac{K_k(u_k)}{\|K_k(u_k)\|^2} \cdot (y_k - K_k(u_k) \cdot z_{k-1}) \quad (4.8)$$

De maneira similar ao método LMS, o parâmetro μ controla o passo de convergência, e, para estas simulações será considerado como $\mu = 1$.

Para fazer a simulação será utilizado o seguinte sistema não linear:

$$y_k = (\alpha[k] \cdot e^{-\sqrt{y_{k-1}}} + u[k])^2 \quad (4.9)$$

Onde $\alpha[k]$ é parâmetro do sistema que varia aleatoriamente através da seguinte equação:

$$\alpha[k] = \alpha[k-1] + w_k \quad (4.10)$$

Com $\sigma_w^2 = 10^{-1}$ e $\alpha[0] = 0.98$

Nesta simulação iremos calcular o MSE e o EMSE da mesma forma como feito anteriormente, o MSD, por outro lado, perde seu sentido já que o sistema não é formulado de forma vetorial.

Tanto para o KKE quanto para o KNLMS será utilizado o kernel gaussiano dado em (4.11) com parâmetro $\xi = 2 * 10^{-4}$.

$$K(x, y) = e^{-\frac{\|x-y\|^2}{\xi}} \quad (4.11)$$

Como pode ver-se na figura 9, diferentemente dos resultados encontrados no capítulo anterior, o algoritmo KNLMS teve uma performance levemente melhor que o KKE. Contudo, os dois algoritmos conseguiram estimar muito bem o sistema.

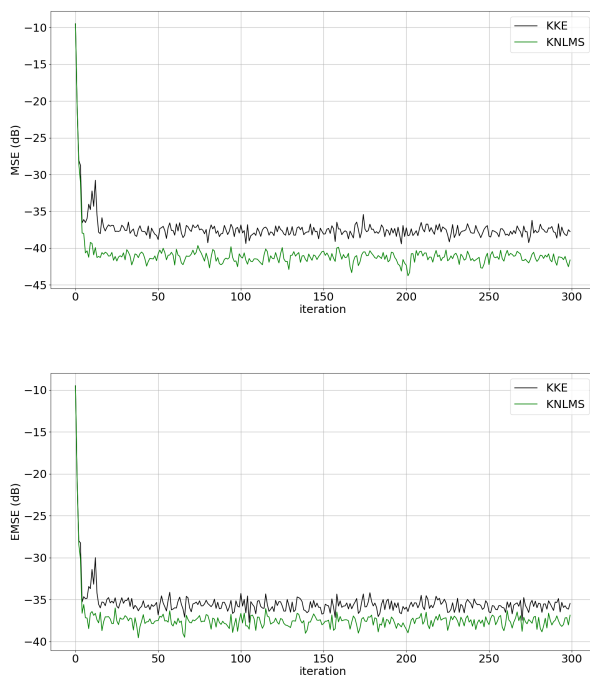


Figura 9 – Erros de estimação com KKE e KNLMS

5 Conclusão

Vimos neste trabalho que, por ser o filtro ótimo para minimização do erro na saída, o filtro de Kalman tem bons resultados de filtragem e estimação de sistemas em comparação com os algoritmos da família dos mínimos quadrados, que estão dentre os mais utilizados em aplicações de identificação de sistemas.

Quando utilizado para filtragem de medições o filtro de Kalman consegue mais rapidamente estimar o valor real da medição e, a partir do modelo de variação da medição, determinar a confiabilidade de cada nova medida e, assim, ponderar da melhor maneira a estimativa final a partir da nova medição e da medição prevista pelo modelo, assim como fazer fusão de sensores.

A mesma estrutura do filtro pode ser utilizada para identificação de sistemas lineares utilizando as entradas do sistema como modelo de medição da função de transferência ou aproximação dela como uma função de transferência do tipo FIR.

Através do truque do Kernel é possível estender a estrutura de identificação para sistemas não lineares modelando o sistema através de uma função contida em um espaço de Hilbert definido por kernels. Esta modelagem permite aplicar uma transformação à entrada do sistema e determinar a função que minimiza o erro como a combinação linear dos produtos internos entre a entrada atual e as entradas passadas representadas neste novo espaço.

Apesar da complexidade computacional dos algoritmos

estudados neste trabalho não serem muito altas, eles são, de fato, mais complexos que os algoritmos da família LMS. No caso de estimação de sistema linear o estimador de Kalman teve uma performance definitivamente melhor que o NLMS, justificando o aumento da complexidade computacional. Por outro lado no caso não linear o KKE teve uma performance ligeiramente pior que o KNLMS, não justificando claramente a sua necessidade.

Contudo, para aplicações nas quais complexidade computacional não é problema, os algoritmos apresentados neste trabalho com certeza são extremamente indicados.

Referências

ÅKESSON, B. M. et al. A generalized autocovariance least-squares method for Kalman filter tuning. *Journal of Process control*, Elsevier, v. 18, n. 7-8, p. 769–779, 2008. Citado na página 30.

BARBOZA, J. R.; others. Filtro de Kalman, espaço de Hilbert definido por Kernels reprodutivos, não linear, não estacionário, eco acústico. Universidade Catolica de Pelotas, 2016. Nenhuma citação no texto.

BULUT, Y.; VINES-CAVANAUGH, D.; BERNAL, D. Process and measurement noise estimation for kalman filtering. In: *Structural Dynamics, Volume 3*. [S.l.]: Springer, 2011. p. 375–386. Citado na página 30.

GAN, Q.; HARRIS, C. J. Comparison of two measurement fusion methods for kalman-filter-based multisensor data fusion. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic systems*, IEEE, v. 37, n. 1, p. 273–279, 2001. Citado na página 19.

KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, American Society of Mechanical Engineers, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960. Nenhuma citação no texto.

KAY, S. M. *Fundamentals of statistical signal processing: Practical algorithm development*. [S.l.]: Pearson Education, 2013. v. 3. Nenhuma citação no texto.

KIMELDORF, G. Some Results on Tchebychefian Spline Functions*. *JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS*, v. 33, p. 82–95, 1971. Citado na página 45.

LEFFERTS, E. J.; MARKLEY, F. L.; SHUSTER, M. D. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 5, n. 5, p. 417–429, 1982. Citado na página [21](#).

LIU, W.; PRINCIPE, J. C.; HAYKIN, S. *Kernel adaptive filtering: a comprehensive introduction*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. v. 57. Nenhuma citação no texto.

NISHIKAWA, K.; ALBU, F. Implementation method of kernel adaptive filter as an add-on for a linear adaptive filter. In: *IEEE Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2015 23rd European*. [S.l.], 2015. p. 2686–2690. Citado na página [47](#).

ODELSON, B. J.; RAJAMANI, M. R.; RAWLINGS, J. B. A New Autocovariance Least-Squares Method for Estimating Noise Covariances *. *TWMCC*, p. 2003–4, 2003. Citado na página [30](#).

PAULO, S. R. D.; others. Adaptive filtering: algorithms and practical implementation. *The international series in Engineering and Computer Scienc*, p. 23–50, 2008. Citado na página [38](#).

PETERSEN, K. B.; PEDERSEN, M. S.; others. The matrix cookbook. *Technical University of Denmark*, v. 7, n. 15, p. 510, 2008. Citado na página [28](#).

ROSINHA, J. B.; ALMEIDA, S. J. D.; BERMUDEZ, J. C. A new kernel Kalman filter algorithm for estimating time-varying nonlinear systems. In: *Proceedings - IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. [S.l.: s.n.], 2017. ISBN 9781467368520. ISSN 02714310. Nenhuma citação no texto.